Данная серия методичек посвящается лучшему семинаристу по электроду
рассказчику баек
и программы мехмата и НМУ
стильно одевающимся, всегда и везде
и улыбчивому, как Степаньянц
дающему позитивное настроение на весь семинар… да не, на всю неделю

Семинарист: И эти люди тогда сдали экзамен (в НМУ) самому Кузнецову… Кузнецову! Вот вы знаете, кто это такой?
Студент: Нет, но по контексту можно догадаться. Вы же не такой?

Поставим следующую задачу.

Представим себе огромный сферический детектор радиусом r. Представили?

А теперь представьте, что в центре этого детектора движется заряд. Причём характерные размеры его движения много меньше r.

Заряд, естественно, будет двигаться с ускорением. Например:

$x=0$, $y=0$, $z=ql*\sin(\omega t)$. Это задача 7.1, только там вместо l буква a, но давайте всё-таки использовать l для длины.

Или заряд движется по окружности с постоянной угловой скоростью ω (задача 7.2).

Как мы знаем из школы, движущийся с ускорением заряд излучает в пространство электромагнитные волны. Научимся же количественно их считать!

Нас будет интересовать:

1) Полная мощность, которая будет на детекторе

2) Распределение мощности по частям детектора (где будет больше, а где меньше?)

3) Скалярный и векторный потенциалы на детекторе в каждой его точке

4) **E** и **H** на детекторе в каждой его точке

5) Поляризация излучения.

Замечание 1. Во всех задачах мы считаем закон движения заданным, наша задача – найти излучение. Т.е. заряд двигает чья-то рука (естественно, непроводящая). Если бы руки не было бы, то заряд в результате излучения поменял бы свой закон движения из-за уменьшения его полной энергии. Но наша рука способна ему добавлять энергию при необходимости, лишь бы он соблюдал нужный нам закон движения.

Замечание 2. Есть такая вещь, как запаздывание. Нас будет интересовать потенциал от заряда, а он имеет свойство запаздывать. Так как местоположения заряда будет постоянно меняться, будет меняться время запаздывания, что будет очень сильно мешать.

Поэтому мы специально берём очень большую сферу детектора, чтобы расстояние от всех точек, где был заряд, то любой точки на сферы было примерно одинаковым.

Но время запаздывания всё равно будет и будет оно r/c. Но можно заметить, что возмущение на детекторе было бы точно такое же, как будто если бы вместо закона движения заряда $\bar{r}_{з}(t)$ был бы закон $\bar{r}_{з}\left(t - \frac{r}{c}\right)$, а запаздывания вовсе бы не было. Поэтому разумно ввести новую переменную $\tau = t - \frac{r}{c}$, записывать все законы движения заряда с ней и тогда можно будет не учитывать запаздывание! Так и будем делать.

Где-то далее в данной методичке будет мелькать t вместо τ, это всё опечатки. Везде должно быть τ.

Из прошлой методички мы получили потенциалы Лиенара-Вихерта, которые позволяют решить задачу точно, но использование их приведёт к интегралам, которые мы никогда в жизни не возьмём. Так что будем использовать приближения. Начнём с электрического дипольного.

Формулы для ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИПОЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ:

Полная мощность	$P(\tau) = \frac{2\ddot{\vec{d}}^2}{3c^3}$
Плотность мощности на телесный угол (угловое распределение излучения)	$\frac{\partial P(\vec{n},\tau)}{\partial \Omega} = \frac{[\ddot{\vec{d}} \times \vec{n}]^2}{4\pi c^3}$
Скалярный потенциал	$\varphi(\vec{n},\tau) = \frac{\vec{n}\dot{\vec{d}}(\tau)}{cr}$
Векторный потенциал	$\vec{A}(\vec{n},\tau) = \frac{\dot{\vec{d}}(\tau)}{cr}$
Магнитная напряжённость	$\vec{H}(\vec{n},\tau) = \frac{[\ddot{\vec{d}}(\tau) \times \vec{n}]}{rc^2}$
Электрическая напряжённость	$\vec{E}(\vec{n},\tau) = [\vec{H}(\vec{n},\tau) \times \vec{n}]$

d – это дипольный момент. Его обозначают то **d**, то **p**. Ну давайте я в этой методе буду его как **d** обозначать, тем более что преподы так обычно и делают.

n – единичный радиус-вектор к точке на сфере.

Как эти формулы получаются? Сначала, используя потенциалы Лиенара-Вихерта, получаются формулы для потенциалов, затем для **E** и **H**, ну а затем уже для мощности. Не будем тратить время на их получения, а поучимся их применять на примере задачи:

ЗАДАЧА 7.1

Пусть заряд движется по закону

x=0, y=0, z=q*l**sin(ωt). Это задача 7.1, только там вместо *l* буква а, но давайте всё-таки использовать *l* для длины.

Как и договаривались, избавляемся от учёта запаздывания, заменяя t на τ=t-r/c. Итак, закон движения:

x=0, y=0, z=q*l**sin(ωτ).

Раз у нас дипольное приближение, то мы ищем дипольный момент. Возможно, вас смущает то, что мы ищем «ДИПОЛЬНЫЙ» момент, а диполя нет. На самом деле дипольный (как и квадрупольный) есть у любой системы. Просто у диполей (систем с суммарным зарядом 0) именно дипольное слагаемое с дипольным моментом играет главную роль в потенциале, т.к. суммарнозарядовое будет ноль. Однако подсчитать это слагаемое мы можем для любых систем, и подсчитать дипольный момент тоже для любых систем.

Дипольный момент будет равен

$$\bar{d}(\tau) = ql\sin\omega\tau\,\bar{e}_z$$

А вторая производная по времени

$$\ddot{\bar{d}}(\tau) = -\omega^2 ql\sin\omega\tau\,\bar{e}_z$$

Тогда полная мощность, пришедшая на детектор, будет

$$P(\tau) = \frac{2\ddot{d}^2}{3c^3} = \frac{2q^2l^2\omega^4\sin^2\omega\tau}{3c^3}$$

Нас спрашивают интенсивность. Для этого нужно усреднить мощность по периоду. Среднее значение квадрата синуса за период – ½. Поэтому интенсивность будет

$$I = \frac{q^2 l^2 \omega^4}{3c^3}$$

И она уже не должна зависеть от времени.

Внимание! В учебнике Денисова буквой I обозначена именно мощность. Естественно, это идиотское решение. Мощность обозначается буквой P, а интенсивность – буквой I. И это разные физические величины (мощность зависит от времени, интенсивность получается усреднением мощности за период и от времени не зависит). Будьте внимательны, если вы читаете не только мои методички, обозначения у всех разные и иногда странные ☺

Потенциалы от нас найти не просят. Давайте найдём магнитную напряжённость, она нужна для поляризации. Она считается по формуле

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \frac{[\ddot{\vec{d}}(\tau)\times\vec{n}]}{rc^2}$$

Применим к нашей задаче. Подставим вторую производную дипольного момента:

$$\vec{H}(\vec{r}) = -q\frac{l\omega^2 \sin\omega t}{c^2 r}[\vec{e}_z\times\vec{n}]$$

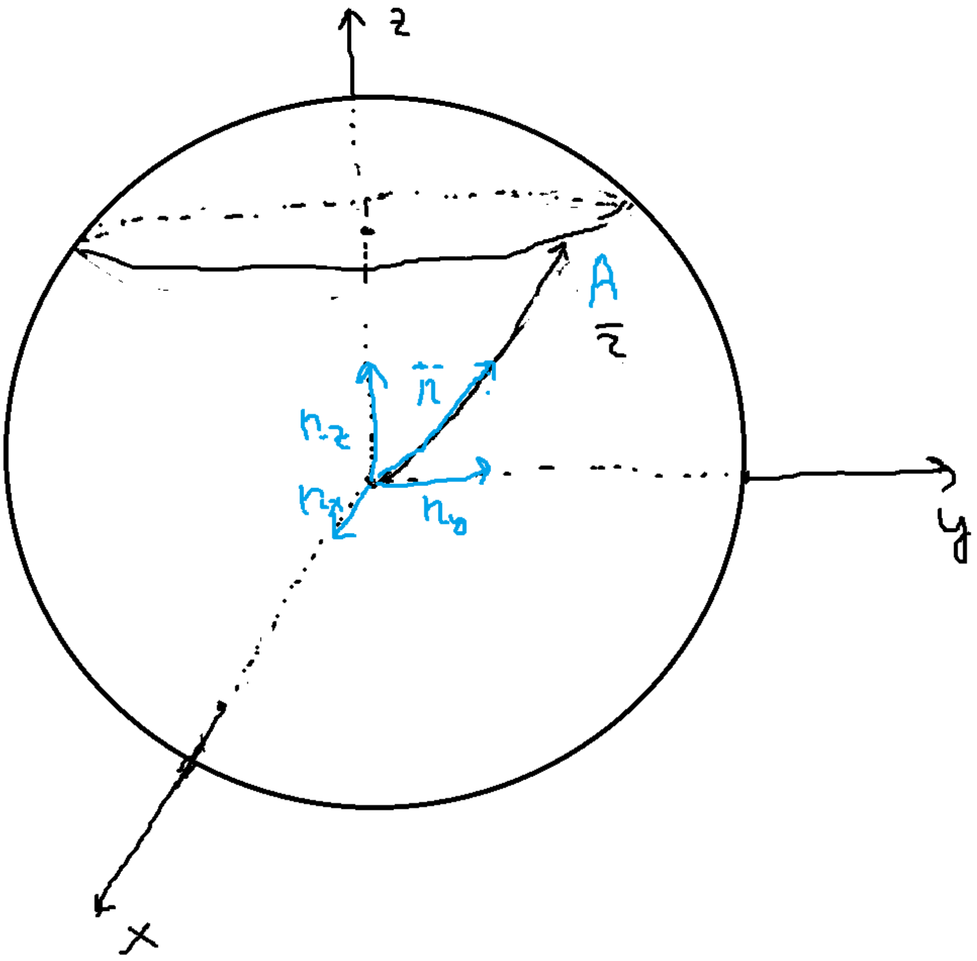
И подсчитаем векторное произведение:

$$\bar{H}(\bar{n}) = -q\frac{l\,\omega^2 \sin\omega t}{c^2 r}\left[\bar{e}_z \times \bar{n}\right]$$

$$\left[\bar{e}_z \times \bar{n}\right] = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ n_x & n_y & n_z \end{vmatrix} = -\bar{e}_x n_y + \bar{e}_y n_x$$

Как мы видим, направление **H** не зависит от времени. Это соответствует случаю линейной поляризации. О, заодно мы поляризацию узнали. Это тоже от нас в задаче требовалось.

Возможно, у нас возникли вопросы, что такое n_x и n_y. Это проекции единичного вектора на соответствующие оси. Скажем, если мы будем смотреть излучение на детекторе в точке, где он пересекает ось абсцисс, то n_x будет 0. Или, если нарисовать картинку,



Мы смотрим возмущение в точке А, строим туда радиус-вектор, на нём делаем единичный вектор и проецируем его на каждую из осей. n_x, n_y, n_z – это длины этих самых проекций. Их ещё называют направляющими косинусами, потому что

$$n_x = \cos(\widehat{\bar{n}, \bar{e}_x})$$
$$n_y = \cos(\widehat{\bar{n}, \bar{e}_y})$$
$$n_z = \cos(\widehat{\bar{n}, e_z})$$

Напомню, галочками обозначается угол между векторами.

Что там с угловым распределением интенсивности (плотностью мощности на телесный угол)? Можно поступить двумя способами: мы уже нашли **H**, векторно умножив на нормаль, найдём **E**, а далее найдём мощность по формуле Умова-Пойтинга.

Есть и второй способ, именно который от вас и ждут: воспользоваться готовой формулой

$$\frac{dP(\bar{n},\tau)}{d\Omega} = \frac{[\ddot{d}(\tau) \times n]^2}{4\pi c^3}$$

Что она означает? Ну вот есть у нас направление **n** вдоль радиус-вектора **r**. Представим себе тонкий конус, направленный из центра сферы вдоль **r**. Этакий тонкий «кулёк», который выбьет на сфере небольшую площадь. Если конус достаточно тонкий, то возмущение во всех точках будет практически одинаково. Тогда мощность, приходящую на ту площадь сферы, выделенную кульком, можно считать прямо пропорциональной этой площади. А коэффициент пропорциональности и будет $\frac{dP(\bar{n},\tau)}{d\Omega}$. Ω – телесный угол. Надеюсь, стало понятнее.

В данной задаче воспользуемся уже подсчитанным векторным произведением

$$\bar{H}(\bar{n}) = -q\frac{l\omega^2 \sin\omega t}{c^2 z}[\bar{e}_z \times \bar{n}]$$

$$\parallel$$

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ n_x & n_y & n_z \end{vmatrix}$$

$$\parallel$$

$$-\bar{e}_x n_y + \bar{e}_y n_x$$

Возв

$$[\ddot{\bar{d}}(\tau) \times \bar{n}] = ql\omega^2 \sin^2\omega\tau(\bar{e}_x n_y - \bar{e}_y n_x)$$

Это вектор. Считаем от него квадрат.

$$q^2 l^2 \omega^4 \sin^4\omega\tau(n_x^2 + n_y^2)$$

И делим на $4\pi c^3$. Получаем ответ:

$$\frac{q^2 l^2 \omega^4 \sin^4\omega\tau(n_x^2 + n_y^2)}{4\pi c^3}$$

Так как нас спрашивают угловое распределение интенсивности, а не мощности, усредним по периоду. Среднее значение четвёртой степени синуса… а не ½, т.к. $\sin^4(\xi) \leq \sin^2(\xi)$. Нам нужно вместо $\sin^4(\omega\tau)$ написать среднее значение четвёртой степени синуса $\int_0^{2\pi} \sin^4\xi \, d\xi / 2\pi$, равное 3/8 (сравни со средним значением квадрата синуса за период, которое равно ½, т.е. 4/8. Это вызвано как раз тем, что $\sin^4(\xi) \leq \sin^2(\xi)$). Таким образом, интенсивность будет

$$\frac{q^2 l^2 w^4 \cdot 3/8}{4\pi c^3} = \frac{3}{32}\frac{q^2 l^2 w^4}{\pi c^3}$$

Давайте, глядя на полученный результат, поймём, куда излучается мощность. Прежде всего, она совсем не излучается вдоль оси z, вдоль которой движется заряд, т.е. в двух точках детектора, где он пересекается с прямой OZ, интенсивность (да и мощность) будет 0.

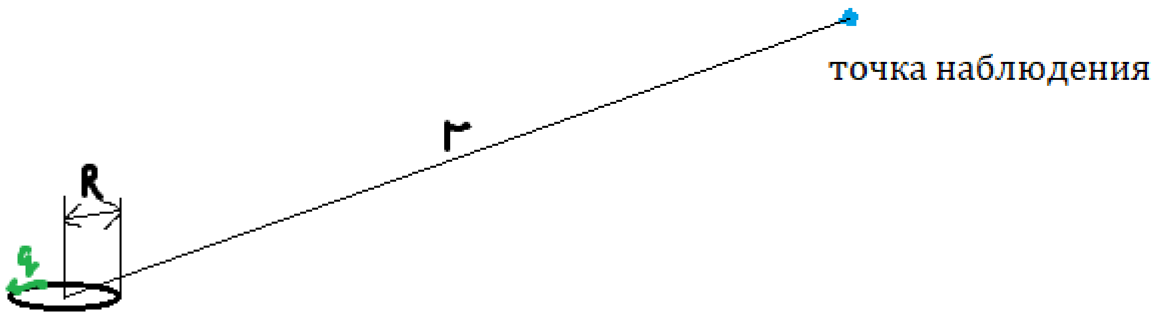
В методичке по оптике про рассеяние я упомянул т.н. индикатрису рассеяния, показывающий интенсивность в разных направления. Здесь она будет иметь вид тора с нулевым внутренним радиусом.

Чтобы узнать интенсивность в любом из направлений, надо провести луч в этом направлении, и длина от нуля координат до точки, где он пересечёт индикатрису, и будет интенсивность (с точностью до множителя).

Ну вот, как мы видим, если мы проведём луч вблизи оси z, то интенсивность у нас будет маленькая. А если ровно по оси z – вообще 0.

ЗАДАЧА 7.2

Заряд движется по окружности радиусом R с постоянной угловой скоростью ω. Не путать радиус окружности, по которой движется заряд - R с радиусом нашего сферического детектора r, R<<r.



Тогда дипольный момент будет вот такой вот вектор

$$\bar{d}(\tau) = qR\,(\cos\omega\tau,\ \sin\omega\tau,\ 0)$$

Находим вторую производную:

$$\ddot{\bar{d}}(\tau) = -\omega^2 qR\,(\cos\omega\tau,\ \sin\omega\tau,\ 0)$$

В этом случае полная мощность излучения будет

$$P(\tau) = \frac{2\left[\ddot{d}(\tau)\right]^2}{3c^3} = \frac{2\omega^4 q^2 R^2(\cos^2\omega\tau + \sin^2\omega\tau)}{3c^3} = \frac{2\omega^4 q^2 R^2}{3c^3}$$

Она не зависит от времени, поэтому усреднять по времени будет очень просто: интенсивность будет такой же.

Считаем составляющую магнитного поля:

$$\bar{H}(\bar{n},\tau) = \frac{[\ddot{d}(\tau)\times\bar{n}]}{2c^2} = -\frac{\omega^2 qR}{2c^2}\begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \cos\omega\tau & \sin\omega\tau & 0 \\ n_x & n_y & n_z \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{\omega^2 qR}{2c^2}\left(\bar{e}_x n_z \sin\omega\tau - \bar{e}_y n_z\cos\omega\tau + \bar{e}_z(n_y\cos\omega\tau - n_x\sin\omega\tau)\right)$$

Если с вас не спрашивают **H**, а спрашивают лишь поляризацию, то в принципе можете забить на коэффициент и считать лишь направление.

Как мы видим, плоскость поляризации зависит от времени, вращается. Значит, это эллиптическая поляризация.

И считаем плотность мощности на телесный угол:

$$\frac{dP(\tau,\bar{n})}{d\Omega} = \frac{[\ddot{\bar{d}} \times \bar{n}]^2}{4\pi c^3} =$$

$$= \frac{\omega^4 q^2 R^2 \left(n_z^2 \sin^2 \omega\tau + n_z^2 \cos^2 \omega\tau + (n_y \cos\omega\tau - n_x \sin \omega t)^2\right)}{4\pi c^3}$$

$$= \frac{\omega^4 q^2 R^2 \left(n_z^2 + (n_y \cos\omega\tau - n_x \sin \omega t)^2\right)}{4\pi c^3}$$

В таких задачах нас всегда будет интересовать не мощность излучения на телесный угол, а интенсивность: именно её будет регистрировать в эксперименте детектор (как правило, период движения заряда меньше временного интервала между соседними измерениями детектора). Займёмся усреднением по времени. Для этого раскроем квадрат:

$$\frac{\omega^4 q^2 R^2 \left(n_z^2 + n_y^2 \cos^2 \omega\tau + 2 n_y n_x \cos\omega\tau \sin\omega\tau + n_x^2 \sin^2 \omega\tau\right)}{4\pi c^3}$$

Среднее значение произведения косинуса и синуса за период будет 0, квадратов синуса и квадратов косинуса – ½. Получим ответ:

$$I(\bar{n}) = \frac{\omega^4 q^2 R^2 \left(n_z^2 + \frac{n_x^2 + n_y^2}{2}\right)}{4\pi c^3}$$

Или, используя равенство $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$

$$I(\bar{n}) = \frac{\omega^4 q^2 R^2 \left(1 - \frac{n_x^2 + n_y^2}{2}\right)}{4\pi c^3}$$

Честно говоря, в уме представить индикатрису рассеяния в этом случае будет мне уже сложно.

ЗАДАЧА 7.4

Переходим к задаче 7.4, где у нас та же схема, что и в задаче 7.1 – заряд, колеблющийся по гармоническому закону. Только от нас требуется узнать не дипольное слагаемое излучение, а квадрупольное! Так сказать, повысить точность всех наших ответов.

Когда заходит речь о квадрупольном слагаемом, сначала нужно подсчитать этот самый квадрупольный момент системы. И потом нам придётся его трижды продифференцировать по времени.

Дипольный момент – это симметричная матрица 3x3. Нам нужно узнать 6 чисел. Погнали.

Можно искать через объёмную плотность. Именно так делает Шишанин (зря, замечу). Давайте всё же так подсчитаем для примера D_{xx}. Напомню формулу:

$$D_{\alpha\beta} = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\bar{r}) \left(3 r_\alpha r_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}\right) dV(\bar{r})$$

Нам ещё нужна объёмная плотность заряда.

$$\rho(\bar{r}) = q\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z - l\sin\omega t)$$

Подставляем:

$$D_{xx} = \iiint_{\mathbb{R}^3} q\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z - l\sin\omega t)\left(3x^2 - x^2 - y^2 - z^2\right) dx\,dy\,dz$$

С x и y расправляемся быстро: и туда, и туда надо подставить x и y = 0, иначе не позволят б(x) и б(y). Останется интеграл по z

$$q\int_{-\infty}^{\infty}\delta(z-l\sin\omega t)\cdot(-z^2)\,dz$$

Если аргумент дельта-функции сложный, нужно быть осторожнее: если производная по переменной интегрирования не 1, будут приколы (см. предыдущую методичку, по шестому семинару). К счастью, это не этот случай. Здесь всё просто: D_{xx} будет $-q*(l\sin(\omega\tau))^2$

Разумеется, таким же будет D_{yy}.

Но мы могли не цацкаться с дельта-функциями, а воспользоваться готовыми формулами для компонент квадрупольного момента заряда в точке (x, y, z):

$D_{xx}=q(3*r_x*r_x - r^2)=q(3x^2-x^2-y^2-z^2)=q(2x^2-y^2-z^2)$

$D_{yy}=q(3*r_y*r_y - r^2)= q(3y^2-x^2-y^2-z^2)=q(2y^2-x^2-z^2)$

$D_{zz}=q(3*r_z*r_z - r^2)= q(3z^2-x^2-y^2-z^2)=q(2z^2-x^2-y^2)$

$D_{xy}=q(3*r_x*r_y)=3qxy$

$D_{xz}=q(3*r_x*r_z)=3qxz$

$D_{yz}=q(3*r_y*r_z)=3qyz$

Разумеется, это гораздо быстрее.

Подставляем $x=0$, $y=0$, $z=q*\sin(\omega\tau)$:

$D_{xx}= q(2x^2-y^2-z^2)=-q*(l\sin(\omega\tau))^2$

$D_{yy}= q(2y^2-x^2-z^2)=-q*(l\sin(\omega\tau))^2$

$D_{zz}= q(2z^2-x^2-y^2)=2q*(l\sin(\omega\tau))^2$

$D_{xy}= 3qxy=0*0=0$

$D_{xz}= 3qxz=0*\ldots=0$

$D_{yz}= 3qyz=\ldots*0=0$

Итак, матрица D имеет вид:

$$ql^2\begin{pmatrix} -\sin^2 w\tau & 0 & 0 \\ 0 & -\sin^2 w\tau & 0 \\ 0 & 0 & 2\sin^2 w\tau \end{pmatrix}$$

Или же

$$-ql^2\sin^2 w\tau\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Теперь надо вычислить третью производной этой матрицы по времени. Для этого нужно вычислить третью производную по времени от квадрата синуса. Делаем это:

Первая производная: $\frac{\partial}{\partial\tau}\sin^2 w\tau = 2\sin w\tau\cdot\cos w\tau\cdot w = w\sin 2w\tau$

Вторая производная: $\frac{\partial}{\partial\tau}w\sin 2w\tau = w\frac{\partial}{\partial\tau}\sin 2w\tau = 2w^2\cos 2wt$

Третья производная: $\frac{\partial}{\partial\tau}\left(2w^2\cos 2w\tau\right) = 2w^2\frac{\partial}{\partial\tau}\cos 2w\tau = -4w^3\sin 2w\tau$

Теперь мы готовы найти третью производную квадрупольного момента:

$$\dddot{D}(\tau) = 4ql^2w^3\sin 2w\tau\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Иногда над D ставят черту, иногда нет. Вообще без черты у нас скаляры, а с чертой векторы. D – это матрица, ни то, ни то ☺ Можете ставить, можете не ставить, главное, помните, что это матрица.

Давайте для начала начнём полную интенсивность. Формула для неё:

$$P(\tau) = \frac{D^2(\tau)}{180 c^5}$$

Стоп, стоп. У нас тут квадрат матрицы 3x3. Что это?

Здесь это – т.н. скалярный квадрат тензора (термин, используемый автором методичек, не является общепринятым). Как мы вычисляем квадрат вектора? Возводим каждую компоненту в квадрат и складываем. Так вот, для матрицы это же самое:

$$D_{xx}^2 + D_{yy}^2 + D_{zz}^2 + 2D_{xy} + 2D_{xz} + 2D_{yz}$$

Благодаря тому, что матрица симметричная, слагаемых 6, а не 9.

А эпитет «скалярный» подчёркивает, что здесь не матричное умножение, дающее результатом матрицу а вот такое вот, дающее в результате скаляр. Как вы понимаете, аналогично скалярный квадрат можно ввести и для куба 3x3, и для гиперкуба любого порядка.

В данной задаче матрица диагональная, так что это будет просто сумма квадратов элементов на главной диагонали.

Мощность будет

$$P(\tau) = \frac{16 q^2 l^4 \omega^6 \sin^2 2\omega\tau (1+1+4)}{180 c^5} = \frac{8 q^2 l^4 \omega^6 \sin^2 2\omega\tau}{15 c^5}$$

А интенсивность – среднее значение мощности за период, т.е.

$$I = \frac{4q^2 l^4 \omega^6}{15c^5}$$

Сравним с интенсивностью от дипольного приближения:

$$I = \frac{q^2 l^2 \omega^4}{3c^3}$$

Оно отличается домножением на вот такую величину

$$\left(\frac{l\omega}{c}\right)^2$$

В условии 7.1 сказано, что это величина много меньше единицы, поэтому квадрупольное слагаемое оказывается много меньше дипольного. А может оно оказаться больше 1?

Запишем ω как 2π/T и увидим:

$$\frac{l\omega}{c} << 1 \qquad \frac{2\pi l}{Tc} = \frac{\pi \frac{v_{cp}}{2}}{c} << 1$$

Где v_{cp} – средняя скорость движения заряда за период, 4*l*/T (т.к. за период заряд проходит расстояние 4*l*).

Так как π/2>1, ответ: для релятивистских частиц может, и тогда наше разложение в ряд будет уже абсолютно неприменимо. Но чем меньше скорость заряда, чем точнее наши приближения. Теперь мы поняли, почему в теме семинара сказано «излучение НЕрелятивистских частиц».

Кстати, если нас будут спрашивать про длину волны излучения , то это ограничение будет означать, т.к. λ=c/ω, что, что *l*<<λ.

Таким образом, только для нерелятивистских случаев имеет смысл раскладывать излучение на электрическое дипольное, магнитое дипольное,

электрическое квадрупольное и т.д. слагаемые, потому что каждое следующее имеет следующий порядок малости.

Я упомянул магнитное дипольное излучение. Да, есть и такое. По порядку малости:

Самое большое – электрическое дипольное

Далее идёт магнитное дипольное

Далее идёт электрическое квадрупольное.

Замечу, кстати, что у нас тут в формулах активно участвует ω. Раньше у нас этой буквы на электроде не было. И волна идёт синусоидальная.

Это связано исключительно с тем, что заряд движется периодически, с циклической частотой ω. Если у нас рука двигает заряд сумбурно, по какому-то кривому закону (например, он движется по окружности, но с разной скоростью), то волна пойдёт, волна периодическая, но отнюдь не синусоидальная. А если движение заряда не периодическое лишь бы только характерные размеры движения были много меньше радиуса детектора r!), то никакой циклической частоты у нас не будет.

Это я к тому, чтобы вы ещё раз поняли: волны могут быть любой формы, не обязательно синусоидальной.

Так, мы не дорешали 7.4: нужно ещё угловое распределение интенсивности! Найти формулу для неё, когда излучение квадрупольное, оказалось целым квестом. У Чугреева нашёл

$$\vec{H}(\tau) = \frac{[D \times \overline{e}_r]}{6c^3 \cdot r}$$

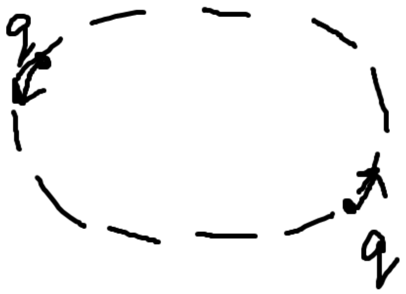
($\mathbf{e_r}$ – это то, что у нас обозначалось как $\mathbf{n_r}$)

Всё бы ничего, только как умножать матрицу 3х3 на вектор? Как матрицу на столбец?

Ответим ещё вот на какой вопрос: а на какой частоте (циклической) наше квадрупольное излучение? ω? Нит, лалка, ω у электрического дипольного излучения, у электрического квадрупольного (по крайней мере, в нашей задаче) оказалось 2ω.

ЗАДАЧА 7.5

В задаче 7.5 у нас два одинаковых заряда, движущихся по окружности друг напротив друга.



Как можно понять, зарядовый центр масс будет 0, и дипольный момент будет 0, и электрическое дипольное излучение будет 0. А вот электрическое квадрупольное излучение как раз будет.

Тогда координаты двух зарядов запишутся как

x_1=R*cosωτ, x_2=-x1

y_1=R*sinωτ, y2=-y1,

z1=z2=0.

$D_{xx}= q(2x_1^2-y_1^2-z_1^2+2x_2^2-y_2^2-z_2^2)=2qR^2(2\cos^2\omega\tau-\sin^2\omega\tau)= 2qR^2(3\cos^2\omega\tau-1)$

D_{yy} аналогично$= 2qR^2(2\sin^2\omega\tau-\cos^2\omega\tau)=2qR^2(3\sin^2\omega\tau-1)$.

D_{zz}… А тут мы воспользуемся тождеством

$D_{xx}+ D_{yy}+ D_{zz}=0.$

Как оно доказывается?

$D_{xx}= q(2x^2-y^2-z^2)$

$D_{yy}= q(2y^2-x^2-z^2)$

$D_{zz}= q(2z^2-x^2-y^2)$

Ну тупо сложите их. Это мы доказали для точечного заряда, но любой размазанный заряд – это суперпозиция точечных зарядом, там всё точно также. Так что формула $D_{xx}+ D_{yy}+ D_{zz}=0$ верна всегда.

Так вот, $D_{zz}=-(D_{xx}+ D_{yy})=- 2qR^2(2\cos^2\omega\tau-\sin^2\omega\tau+2\sin^2\omega\tau-\cos^2\omega\tau)=$
$=-2qR^2(\cos^2\omega\tau+\sin^2\omega\tau)= -2qR^2.$

$D_{xy}=3q(x_1y_1+x_2y_2)=3q(x_1y_1+(-x_1)(-y_1))=6qx_1y_1=6qR^2 \cos\omega\tau \sin\omega\tau=3qR^2\sin2\omega\tau$

D_{xz} и D_{yz} будут равны 0 из-за равенства нулю аппликаты обоихзарядов.

Тогда мощность будет

$$P(\tau)=\frac{1}{180c^5}\left(\dddot{D}_{xx}^2+\dddot{D}_{yy}^2+\dddot{D}_{zz}^2+2\dddot{D}_{xy}^2\right)$$

Но D_{zz}= константа, от него первая производная будет 0, чего уж говорить о третьей. А вот остальные слагаемые будут ненулевыми.

Считаем третью производную от D_{yy}, т.е. от $2qR^2(3\sin^2\omega\tau-1)$. Единица убьётся сразу. Надо считать третью производную от квадрата синуса. Она уже подсчитана в задаче 7.4:

Первая производная: $\frac{\partial}{\partial\tau}(\sin^2 w\tau) = 2\sin w\tau\cdot\cos w\tau\cdot w = w\sin 2w\tau$

Вторая производная: $\frac{\partial}{\partial\tau}\ w\sin 2w\tau = w\frac{\partial}{\partial\tau}\sin 2w\tau = 2w^2\cos 2w\tau$

Третья производная: $\frac{\partial}{\partial\tau}\left(2w^2\cos 2w\tau\right) = 2w^2\frac{\partial}{\partial\tau}\cos 2w\tau = -4w^3\sin 2w\tau$

Тогда $\dddot{D}_{yy}^2$ будет $(2qR^2*(-4\omega^3\sin2\omega\tau))^2=(8q\ R^2\omega^3\sin2\omega\tau)^2$

Для D_{xx} придётся считать третью производную от квадрата косинуса:

Первая производная: $\frac{\partial}{\partial\tau}\cos^2 w\tau = 2\cos w\tau\cdot(-w)\sin w\tau = -w\sin 2w\tau$

Вторая производная: $\frac{\partial}{\partial\tau}(-w\sin 2w\tau) = -2w^2\cos 2w\tau$

Третья производная: $\frac{\partial}{\partial\tau}\left(-2w^2\cos 2w\tau\right) = 4w^3\sin 2w\tau$

Тогда $\dddot{D}_{xx}$ будет $2qR^2*4\omega^3\sin2\omega\tau=8q\ R^2\omega^3\sin2\omega\tau$, а квадрат от этого – $(8q\ R^2\omega^3\sin2\omega\tau)^2$

Наконец, считаем третью производную для D_{xy}

$$\frac{d}{dt}(\sin 2wt) = 2w\cos 2wt$$

$$\frac{d}{dt}(2w\cos 2wt) = -4w^2\sin 2wt$$

$$\frac{d}{dt}(-4w^2\sin 2wt) = -8w^3\cos 2wt$$

Тогда $\dddot{D}_{xy}$ будет $3qR^2*(-8\omega^3\cos 2\omega\tau)=24q\,R^2\omega^3\cos 2\omega\tau$, а квадрат – $(24\,q\,R^2\omega^3\cos 2\omega\tau)^2$.

Теперь мы готовы найти излучение. Суммируем три квадрата (первые два одинаковы) и делим на $180c^5$:

$$P(\tau)=\frac{2(8q\,R^2\omega^3\sin 2\omega\tau)^2+(24\,q\,R^2\omega^3\cos 2\omega\tau)^2}{180c^5}=$$

$$=\frac{q^2R^4\omega^6}{c^5}\left[\frac{2\cdot 8^2\sin^2 2w\tau+24^2\cos^2 2w\tau}{180}\right]=\frac{q^2R^4\omega^6}{c^5}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{2\cdot 4^2\sin^2 2w\tau+12^2\cos^2 2w\tau}{45}\right]=\frac{16}{45}\frac{q^2R^4\omega^6}{c^5}(2\sin^2 2w\tau+$$

$$+9\cos^2 w\tau)=\frac{16}{45}\frac{q^2R^4\omega^6}{c^5}(2+7\cos^2 w\tau)$$

Усредняем по времени, чтобы найти интенсивность. От квадрата косинуса останется половинка, т.е. 3,5. Ответ:

$$I=\frac{16}{45}\frac{q^2R^4\omega^6}{c^5}(2+3{,}5)=\frac{16}{45}\frac{q^2R^4\omega^6}{c^5}\cdot 5{,}5=\frac{88}{45}\frac{q^2R^4\omega^6}{c^5}$$

У Соколова эта задача также решена (начало на 47-й странице), но ответ другой. Ошибка в коэффициенте, автору лень её искать. Ну вы там посмотрите, кто из нас ошибся.

Кстати, помимо электрического дипольного приближения есть ещё и магнитное дипольное приближение. Там вместо **d** стоит магнитный момент **m.** Странно, что в задачнике нет ни одной задачи на эту тему. Так бы я что-нибудь бы решил.